

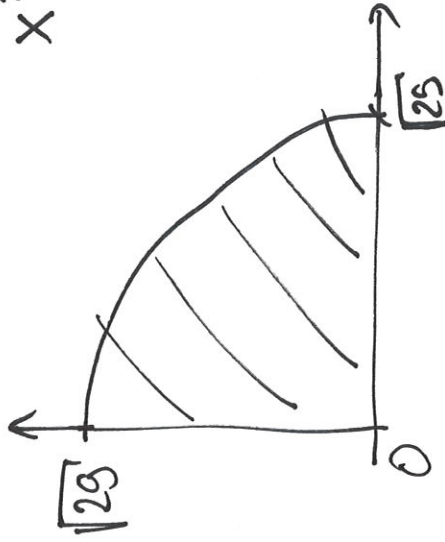
4.12.

Dokončení příkladu z minula:

Urcit extrémny fce $f(x,y) = 5x + 2y$

na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0;$

$$x^2 + y^2 \leq 29\}$$



Hledáme (znovu) kandidáty

na obložen - pomocí metody LM:

oblože je žádná vlna

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 29 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Lagr. fce } L(x,y,d) =$$

$$5x + 2y + d \cdot (x^2 + y^2 - 29)$$

$$\partial_x L = 5 + 2dx = 0 \quad (1)$$

$$\partial_y L = 2 + 2dy = 0 \quad (2)$$

$$\partial_d L = \underbrace{x^2 + y^2 - 29}_{g(x,y)} = 0 \quad (3)$$

Řešíme soustavu: z (1) a (2)

vycházíme x, y pomocí d:

$$(1): 2dx = -5$$

$$\boxed{x = \frac{-5}{2d}}$$

(2) $d \neq 0$: pokud by $d=0 \Rightarrow 5+0=0$ nejde)

$$(2) \quad 2dy = -2$$

$$\boxed{y = \frac{-2}{2d} = -\frac{1}{d}}$$

Tyto vztahy dosadíme do (3):

$$\cancel{(-5/2d)^2 + (-1/d)^2 = 29} \quad \left(\frac{-5}{2d} \right)^2 + \left(-\frac{1}{d} \right)^2 = 29$$

Upravíme:

$$\frac{25}{4d^2} + \frac{1}{d^2} = 29$$

$$\frac{25+4}{4d^2} = 29 \quad |:29$$

$$\frac{1}{4d^2} = 1 \quad |:d^2$$

$$d = \pm \frac{1}{2} \leq d^2 = \frac{1}{4}$$

odtud dopočteme x, y :

$$1) d_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{-5}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -5 \quad \left\{ \begin{array}{l} [-5, 2] \\ \notin M \end{array} \right.$$

$$y = -\frac{1}{d} = -2 \quad \notin M$$

$$2) d_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 2 \end{array} \right\} D = [5, 2] \in M$$

je to kandidát

add. jeho u metody jacobiana

Soubor pro dvě dva proměnných:

① Máme-li okraj (nebo jeho část)
zadaný vztah $g(x, y) = 0$,
bude užit bc i LM.

② Obě tyto metody můžeme
použít všude tam, kde i
dosažovací metodu. Totiž

s podmínky $y = c(x)$ (vhodné
pro dosaž. metodu) bude vždy
užít vztah $g(x, y) = y - c(x) = 0$.

Opacně to ovšem nejde - jsm
případy, kdy dosažov. met. nejde užit.

③ Dosažov. metoda je ale
(s případech, kdy lze užit)
nejméně počítat.

Metoda LH - obecný případ

dáno $f = f(x_1, \dots, x_r)$ (r proměnných)

$$g_1 = g_1(x_1, \dots, x_r) = 0$$

$\vdots$ (s vazeb)

$$g_s = g_s(x_1, \dots, x_r) = 0$$

Pozn: vždy mají platit všechny zhození, tj. hledáme kandidáty na přímém "ploch" zadanych

jednotl. vazbami

Pozn: čísla $r, s \in \mathbb{N}$ libovolnas,
 $r \geq s$

Pro nás: $r = 2$ nebo 3
 $s = 1$ nebo 2

Hledáme extrém f a

s vazbami $g_1, \dots, g_s$, sestavíme nejprve Lagr. fci:

$$L = L(x_1, \dots, x_r, d_1, \dots, d_s) = f + d_1 g_1 + \dots + d_s g_s$$

Spočteme parc. derivace f a L podle r proměnných, položíme je $\neq$ rovné nule:

$$\begin{array}{l} \partial_{x_1} L = 0 \\ \vdots \\ \partial_{x_r} L = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \partial_{d_1} L = g_1 = 0 \\ \vdots \\ \partial_{d_s} L = g_s = 0 \end{array}$$

Toto je soustava $r+s$ rovnic o $r+s$ neznámých. Její řešení = kandidati na extrém.

Příklady:

1 Určete extrém f a

$$f(x, y, z) = 8x + 4y - 2z - 3$$

s jednou vazbou

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 21 = 0$$

Řešení: máme zadán jen okraj,

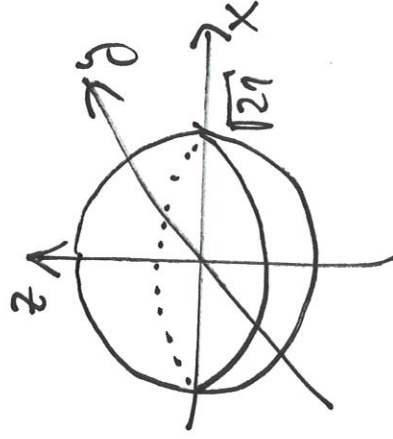
na němž jsou stejné začátky

kandidátů nejmen (f lineární!)

Vazba g zadává sféru

(= kulovou plochu) se středem

v počátku a
poloměrem $\sqrt{21}$.



$$L(x, y, z, d) = 8x + 4y - 2z - 3 + \\ + d \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 21)$$

$$\partial_x L = 8 + 2dx = 0 \quad (1)$$

$$\partial_y L = 4 + 2dy = 0 \quad (2)$$

$$\partial_z L = -2 + 2dz = 0 \quad (3)$$

$$\partial_d L = x^2 + y^2 + z^2 - 21 = 0 \quad (4)$$

Vyjdáme x, y, z pomocí d:

$$(1) \quad 2dx = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{2d} = \frac{-4}{d}$$

$$(2) \quad 2dy = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2d} = \frac{-2}{d}$$

$$(3) \quad 2dz = 2 \Rightarrow z = \frac{2}{2d} = \frac{1}{d}$$

(opět máme $d \neq 0$, jinak

v (1): $8 + 0 = 0 \dots$ nejdá)

Teď vše dosadíme (4):

$$\left(\frac{-4}{d}\right)^2 + \left(\frac{-2}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2 = 21 \quad \%$$

$$\frac{16 + 4 + 1}{d^2} = 21 \quad / : 21$$

$$\frac{1}{d^2} = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$d = \pm 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } d_1 = 1 \dots A = [-4, -2, 1] \\ \text{b) } d_2 = -1 \dots B = [4, 2, -1] \end{array} \right\} \text{ kandidati}$$

konradíme do f:

$$f(A) = \underline{\underline{-45}}$$

$$f(B) = \underline{\underline{39}} \text{ MAX}$$

2 Určete extrémny fce

$$f(x, y, z) = x - 2y + 3z$$

s väzbanmi

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$

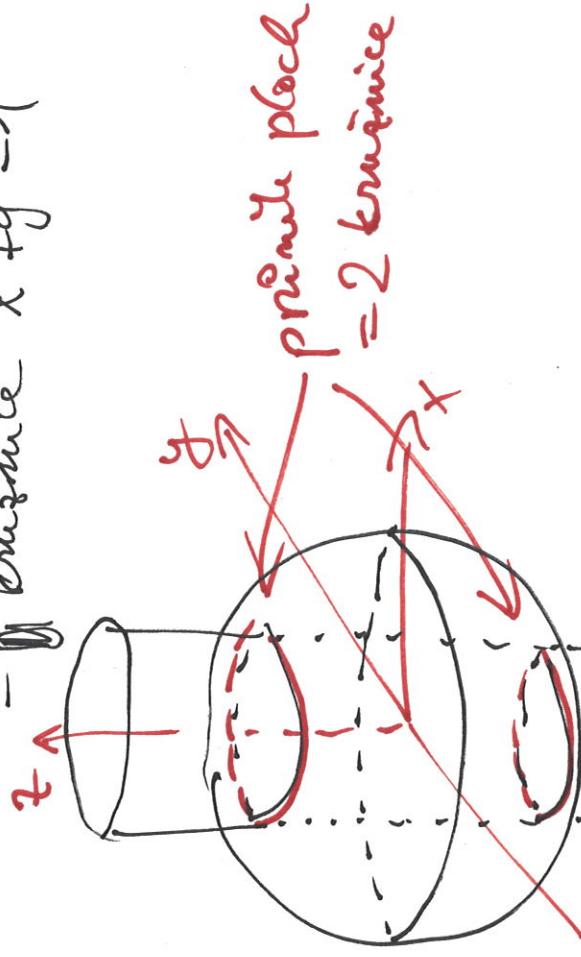
$g_2 \dots$ sfera o polomere $\sqrt{2}$

$g_1 \dots$ valcovat plocha o polomere 1

jejv osa = osa z

Poz rovina x, y (tj. rovina $z=0$)

$$= \text{ kružnice } x^2 + y^2 = 1$$



Lagrangeova fce:

$$L(x, y, z, d_1, d_2) =$$

$$= x - 2y + 3z + d_1 \cdot (x^2 + y^2 - 1) + d_2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 2)$$

$$\begin{aligned} \partial_x L &= 1 + 2d_1x + 2d_2x = 0 & (1) \\ \partial_y L &= -2 + 2d_1y + 2d_2y = 0 & (2) \\ \partial_z L &= 3 + 2d_2z = 0 & (3) \\ \partial_{d_1} L &= g_1 = x^2 + y^2 - 1 = 0 & (4) \\ \partial_{d_2} L &= g_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 & (5) \end{aligned}$$

Vidíme, že (5) a (4) jdou od

sebe odečíst:

$$(5) - (4): z^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow |z| = \pm 1$$

(odpovídá těm 2 kružnicám)

Dále vyjádříme z (1) a (2)

proměnné x, y:

$$(1) \quad 1 + 2x(d_1 + d_2) = 0 \quad / -1$$

$$2x(d_1 + d_2) = -1$$

$$(Opět vidíme: \quad x = \frac{-1}{2(d_1 + d_2)} \quad d_1 + d_2 \neq 0)$$

$$(2) \quad -2 + 2y(d_1 + d_2) = 0$$

$$2y(d_1 + d_2) = 2$$

$$y = \frac{2}{2(d_1 + d_2)} = \frac{1}{d_1 + d_2}$$

Porovnáme těchto 2 ~~vrstev~~ vrstev

$$\text{vidíme } x = -\frac{1}{2}y, \text{ to}$$

upravíme na $y = -2x$

a to dosadíme do (4):

$$x^2 + (-2x)^2 = 1$$

$$5x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{5}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

A ze vrstev $y = -2x$ dopočteme y:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

%

Vidíme, že x a y mají
roztanací znaménka, ale

znaménko uz je nevíce
nezávislé! $\Rightarrow$ celkem
máme $2 \times 2 = 4$ kandidáty:

$$A = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 1 \right], f(A) = \underline{\underline{\sqrt{5} + 3}} \text{ MAX}$$

$$B = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -1 \right], f(B) = \sqrt{5} - 3$$

$$C = \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 \right], f(C) = -\sqrt{5} + 3$$

$$D = \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, -1 \right], f(D) = \underline{\underline{-\sqrt{5} - 3}} \text{ MIN}$$

Pozn: nepočítejte d_1, d_2 .

To lze snadno odolat:
z rovnice (3) spočítáme d_2
a pak z (1) i d_1 .